ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 57, No. 1, 1987

QUOTIENT VOLUMIQUE ET ESPACES DE BANACH DE TYPE 2 FAIBLE

PAR

ALAIN PAJOR

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT

The Banach spaces for which all finite dimensional quotient spaces have uniformly bounded volume ratio are characterized by a weak type 2 property. This is the dual form of a recently published result of V. Milman and G. Pisier on weak cotype 2 Banach spaces.

Pour tout espace de Banach X, on note B_X sa boule unité. Le *quotient volumique* d'un espace normé X de dimension n est défini par

$$\mathrm{vr}(X)=(\mathrm{vol}(B_X)/\mathrm{vol}(\mathscr{E}))^{1/n}$$

où $\mathscr{E}$ désigne l'ellipoïde de volume maximum contenu dans B_X et vol(.) désigne un volume dans X.

Soit $u: X\to Y$ un opérateur entre deux espaces de Banach. Suivant les notations de [5], on note $a_k(u)$ le *k-ième nombre d'approximation* défini par

$$a_k(u)=\inf\{\|u-v\|;\ v: X\to Y,\ \mathrm{rang}\, v<k\}.$$

Les *nombres de Gelfand* sont définis par

$$c_k(u)=\inf\{\|u|_E\|;\ E\subset X,\ \mathrm{codim}\, E<k\}.$$

Enfin les *nombres d'entropie* sont définis par

$$e_k(u)=\inf\left\{\varepsilon>0;\ \text{il existe } y_1,\dots,y_{2^{k-1}}\in Y \text{ tels que } u(B_X)\subset\bigcup_{i\leq 2^{k-1}}(y_i+\varepsilon B_Y)\right\}.$$

Soit l_p^n l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\|(x_i)_{i\leq n}\|=(\Sigma_{i\leq n}|x_i|^p)^{1/p}$, on note $i_{p,q}^n=i_{p,q}$ l'identité considérée comme opérateur de l_p^n dans l_q^n.

Reçu le 15 juillet 1986

Pour tout opérateur u: $l_2^n \to X$, on pose

$$l(u) = \left(\int \| u(x) \|^2 d\gamma_n(x) \right)^{1/2}$$

où γ_n désigne la mesure gaussienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

La norme duale est définie pour un opérateur v: $X \to l_2^n$ par

$$l^*(v) = \sup\{\operatorname{trace}(vu);\ u: l_2^n \to X,\ l(u) \leqq 1\}.$$

Un espace de Banach X est dit de *cotype* 2 *faible* (voir [3]) s'il existe une constante C telle que pour tout entier n et pour tout opérateur u: $l_2^n \to X$ on a:

$$\sup_{k \geqq 1} \sqrt{k}\, a_k(u) \leqq C l(u). \tag{1}$$

La plus petite constante C pour laquelle (1) est vérifiée sera notée $wC_2(X)$.

La classe des espaces de cotype 2 faible a été introduite par V. Milman et G. Pisier dans [3]. Dans [3] les auteurs montrent, entre autres, qu'un espace de Banach X est de cotype 2 faible si, et seulement si, il existe une constante C telle que pour tout sous-espace de dimension finie E de X, on ait $\operatorname{vr}(E) \leqq C$. On s'intéresse ici à la propriété duale, en terme de quotient, et par conséquent à la notion duale (au sens de la théorie du type et cotype) de type 2 faible également introduite dans [3].

Un espace de Banach X sera dit de *type* 2 *faible* s'il existe une constante C telle que pour tout entier n et pour tout opérateur v: $X \to l_2^n$ on a

$$\sup \sqrt{k}\, a_k(v) \leqq C l^*(v).$$

Il revient au même de dire que X est K-convexe et que son dual X^* est de cotype 2 faible (voir [6]).

Le principal résultat de cet article est le suivant:

THÉORÈME 1. *Un espace de Banach X est de type 2 faible si, et seulement si, il existe une constante C telle que pour tout quotient Q de X^* de dimension finie, on ait:*

$$\operatorname{vr}(Q) \leqq C. \tag{2}$$

Ce résultat s'appuie sur de nouvelles caractérisations des espaces de cotype 2 faible et des espaces de type 2 faible.

THÉORÈME 2. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'espace de Banach X est de cotype 2 faible.*

(ii) *Il existe des constantes positives c et C telles que pour tout entier n, pour tout sous-espace E de X de dimension n et pour tout opérateur* $u: E \to l_\infty^n$, *on a*:

$$e_{[cn]}(u) \leqq C\|u\|/\sqrt{n}. \tag{3}$$

(iii) *Il existe des cônstantes positives c et C telles que, pour tout entier n, pour tout sous-espace E de X de dimension n et pour tout opérateur* $u: E \to l_\infty^n$, *le transposé* u^* *de u vérifie*

$$e_{[cn]}(u^*) \leqq C\|u\|/\sqrt{n}. \tag{4}$$

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (i) $\Rightarrow$ (iii) sont des conséquences directes des résultats de [3] (théoréme 8). Pour montrer les deux autres, on utilisera le résultat suivant de B. Carl [1].

LEMME 3. [1] *Soit* $u: X \to Y$ *un opérateur entre deux espaces de Banach. Pour tout entier n, on a*:

$$c_n(u) \leqq \left(\prod_{i \leqq n} c_i(u)\right)^{1/n} \leqq \operatorname{Sup}\{|\det(\langle y_i^*, u(x_j)\rangle)|^{1/n}\}$$

où le supremum porte sur les familles $x_1, \ldots, x_n$ *dans la boule unité de X et* $y_1^*, \ldots, y_n^*$ *dans la boule unité de* Y^*.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. On montre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit n un entier et $u: l_2^n \to X$ un opérateur. Soit $k \leqq n$, on observera qu'ici $a_k(u) = c_k(u)$. On peut donc appliquer le lemme 3 qui nous donne des familles $(x_i)_{i \leqq k} \subset B_{l_2^n}$ et $(y_i^*)_{i \leqq k} \subset B_{X^*}$ telles que

$$a_k(u) \leqq |\det(\langle y_i^*, u(x_j)\rangle)|^{1/k}. \tag{5}$$

Soit H l'espace engendré par $(x_i)_{i \leqq k}$ et $B: l_2^k \to H$ l'opérateur défini sur la base canonique (e_i) par $Be_i = x_i$. Soit $E = u(H) \subset X$ et $A: E \to l_2^k$ défini par $Ay = \sum_{i \leqq k} \langle y_i^*, y\rangle e_i$. On note u_0 l'opérateur u restreint à H et à valeurs dans E.

La matrice $(\langle y_i^*, u(x_j)\rangle)_{i \leqq k, j \leqq k}$ représente ainsi l'opérateur $A\,u_0\,B$, de sorte que (5) s'écrit

$$a_k(u) \leqq |\det(A\,u_0\,B)|^{1/k}. \tag{6}$$

On contrôle $\det B$ à l'aide de l'inégalité de Hadamard

$$|\det B|^{1/k} \leqq \operatorname{Sup}_{i \leqq k} \|x_i\| \leqq 1.$$

D'un autre côté, pour tout entier m, on a (par recouvrement)

$$|\det(Au_0)|^{1/k}=\left(\frac{\mathrm{Vol}\,Au_0(B_H)}{\mathrm{vol}(B_H)}\right)^{1/k}\leqq 2^{m/k}e_m(Au_0).$$

L'entropie de u_0 est estimée à l'aide d'un résultat de [4]

$$\sup_{m\geqq 1}\sqrt{m}\,e_m(u_0)\leqq C_1 l(u_0)$$

où C_1 est une constante universelle. On a donc

$$e_k(u_0)\leqq C_1 l(u)/\sqrt{k}.$$

Maintenant, on a $\|i_{2,\infty}A\|\leqq 1$, puisque $(y_i^*)\subset B_{X^*}$. On a donc d'après (3)

$$e_{[ck]}(i_{2,\infty}A)\leqq C/\sqrt{k}.$$

Soit $m=[ck]+k$, on a par sous-multiplicativité (voir [5])

$$e_m(Au_0)\leqq e_{[ck]}(A)e_k(u_0)=e_{[ck]}(i_{\infty,2}i_{2,\infty}A)e_k(u_0)$$

$$\leqq\|i^k_{\infty,2}\|CC_1 l(u)/k=CC_1 l(u)/\sqrt{k}$$

d'où

$$|\det(Au_0)|^{1/k}\leqq C_1 2^{c+1}Cl(u)/\sqrt{k}$$

et d'après (6)

$$\sqrt{k}\,a_k(u)\leqq C_1 2^{c+1}Cl(u)$$

ou encore

$$wC_2(X)\leqq C_1 2^{c+1}C.$$

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) se démontre de la même manière en transposant $A\,u_0\,B$.

COROLLAIRE. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'espace de Banach X est de type 2 faible.*

(ii) *Il existe des constantes positives c et C telles que pour tout entier n et pour tout opérateur $v: l_1^n\to X$ on ait:*

$$e_{[cn]}(v)\leqq C\|v\|/\sqrt{n}. \tag{7}$$

(iii) *Il existe des constantes positives c et C telles que pour tout entier n et pour tout opérateur $v: l_1^n\to X$ on ait:*

(8) $$e_{[cn]}(v^*) \leqq C\|v\|/\sqrt{n}.$$

DÉMONSTRATION. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (i) $\Rightarrow$ (iii) sont implicites dans [3]. En effet, d'après cet article, si X est de type 2 faible, il existe une constante C telle que, pour tout quotient Q de X^* on ait $wC_2(Q) \leqq C$. Soit $v: l_1^n \to X$ et $Q = X^*/\ker v^*$, les conditions (7) et (8) résultent alors respectivement de (4) et (3). On suppose à présent que (7) est satisfait. L'espace X ne contient pas de l_1^n uniformément (car si $v: l_1^n \to l_1^n$ est l'identité, $e_{[cn]}(v) \sim 1$). Il en résulte d'après [7] que X est K-convexe. On va montrer que X^* est de cotype 2 faible en utilisant (4). Soit $E \subset X^*$, un sous-espace de dimension n et $u: E \to l_\infty^n$.

Soit $\tilde{u}: X^* \to l_\infty^n$ un prolongement de u tel que $\|u\| = \|\tilde{u}\|$. On observe (par exemple par le principe de reflexivité locale) que la condition (7) est également vérifiée par le bidual X^{**}. Il en résulte que

$$e_{[cn]}(u^*) \leqq e_{[cn]}(\tilde{u}^*) \leqq C\|\tilde{u}^*\|/\sqrt{n} = C\|u\|/\sqrt{n}.$$

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) se démontre de la même manière.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Comme nous l'avons déjà noté, d'aprés [3] si X est de type 2 faible, il existe une constante C telle que $wC_2(Q) \leqq C$ pour tout quotient Q de X^*. Il en résulte d'après [3] (théorème 2) que les quotients de dimension finie de X^* ont des quotients volumiques uniformément bornés. Pour démontrer la réciproque, on utilise le corollaire 4. On suppose donc que $\mathrm{vr}(Q) \leqq C$ pour tout quotient Q de X^*, de dimension finie. Soit $v: l_1^n \to X$ un opérateur et $E \supset v(l_1^n)$ un sous-espace de X de dimension n. Soit $Q = E^*$ et $j: l_2^n \to Q$ tel que

$$\|j\| \leqq 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{vr}(Q) = (\mathrm{vol}\, B_Q / \mathrm{vol}\, j(B_{l_2^n}))^{1/n} \leqq C.$$

Par un argument standard, on en déduit que

$$e_{[cn]}(j^{-1}) \leqq 1 \quad \text{où } c = [2(\mathrm{Log}\, 2)C] + 1.$$

Soit v_0 l'opérateur v considéré à valeur dans E.

On écrit maintenant: $v_0^* = i_{2,\infty} i_{\infty,2} v_0^* j j^{-1}$ et on pose $T = i_{\infty,2} v_0^* j: l_2^n \to l_2^n$. On a donc:

$$e_{[cn]+2n}(v_0^*) \leqq e_n(i_{2,\infty}) e_n(T) e_{[cn]}(j^{-1}) \leqq e(i_{2,\infty}) e_n(T).$$

Par un calcul volumique, on obtient $e_n(i_{2,\infty}) \leqq C_2/\sqrt{n}$ où C_2 est une constante universelle.

D'autre part, T étant un opérateur entre espaces de Hilbert, on a:

$$\sqrt{n}\, e_n(T) \leqq \left(\sum_{k \geqq 1} e_k(T)^2 \right)^{1/2} \leqq C_3 \pi_2(T)$$

où C_3 est une constante universelle et $\pi_2(T)$ est la norme 2-sommante de T (voir [5]).

D'où

$$e_n(T) \leqq C_3 \|j\| \, \|v_0\| \, \pi_2(i^n_{\infty,2})/\sqrt{n} \leqq C_3 \|v\|.$$

Par suite

$$e_{[cn]+2n}[v^*] \leqq e_{[cn]+2n}(v_0^*) \leqq C_2 C_3 \|v\|/\sqrt{n}$$

et la condition (8) est vérifiée.

Remarque. Les espaces qui sont à la fois de type 2 faible et de cotype 2 faible sont étudiés dans [6] sous le nom d' "espaces de Hilbert faible". D'après les résultats précédents un espace X est de Hilbert faible si, et seulement si, il existe une constante C telle que pour tout entier n et tout sous-espace E de X, de dimension n, il existe deux ellipsoides $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ tels que

$$\mathscr{E}_1 \subset B_E \subset \mathscr{E}_2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{E}_2)}{\mathrm{Vol}(\mathscr{E}_1)} \right)^{1/n} \leqq C.$$

Signalons d'autre part (cf. [2]) que de tels espaces sont nécessairement réflexifs (donc superréflexifs).

Bibliographie

1. B. Carl, *Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 290–306.
2. W. B. Johnson, Communication personnelle.
3. V. Milman and G. Pisier, *Banach spaces with a weak cotype* 2 *property*, Isr. J. Math. **54** (1986), 139–158.
4. A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **97** (1986), 637–642.
5. A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, Berlin, 1978.
6. G. Pisier, *Weak Hilbert spaces*, en préparation.
7. G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. Math. **115** (1982), 375–392.